Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y Ciencias Sociales

Material Complementario de Cálculo Integral

2024-1

Integrales impropias

1. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcular el valor de la integral para los casos en los que la integral sea convergente.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (b) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} dx$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ (e) $\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2} dx$ (f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} dx$

(g) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$ (h) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$

2. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} dx$ (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ (c) $\int_0^1 \frac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{x}} dx$

3.- Probar que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\pi}{n}$

4.- Demostrar que la integral de Euler $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ es convergente cuando $p > 0$.

5.- Analice la convergencia de $\int_0^{\infty} \frac{arctg(\sqrt{x})}{x^{5/4}} dx$

6.- Hallar el área comprendida entre la curva $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ y su asíntota.

7.- Averiguar si es convergente la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}$$

8.- Calcular la siguiente integral

$$\int_0^{\pi/2} ctgx dx$$

9.- Calcule las siguientes integrales, si es que existen.

a) $\int_0^{\infty} e^{-ax} Sen(bx)dx, \quad a > 0$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}dx$ c) $\int_1^2 \frac{1}{\ln x}dx$

10. Si $0 < \alpha < \pi$, pruebe que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x(\cos\alpha) + 1}\, dx = \frac{\pi - \alpha}{2sen(\alpha)}$.

11. En cada una de las integrales siguientes, halle el valor de la constante a para la cual la integral converge. Evalúe la integral para este valor de a.

a) $\int_1^{+\infty} (\frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x})\, dx$ b) $\int_1^{+\infty} (\frac{a}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+a})\, dx$

12. Si $n \in N^+$, halle una fórmula de recurrencia para

a) $I(n, \alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{[\ln(t)]^n}{t^{\alpha+n}}\, dt, \ \ n > \alpha$

b) $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\, dx$, a constante positiva. Si $a = 1$, calcule I_5 e I_n.

13. Evalúe las siguientes integrales impropias, en caso converjan

a) $\int_0^1 x \ln x\, dx$ b) $\int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$ c) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\, dx$

d) $\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ e) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}\, dx$ f) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$

14. Halle los valores de p para los cuales las siguientes integrales convergen:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p(1+x)^2}\, dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^p}\, dx$

15. Analice la convergencia de las integrales impropias siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2e^{-t}}{t(t+2)}\,dt$ e) $\displaystyle\int_{1/2}^{e} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^x+e^{-x}}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t-sent}\,dt$ h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sen\ x}{x^{3/2}}\,dx$ i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^r\,dx,\ r$ real

Aplicaciones de la integral definida

Aplicaciones a la Economía:

Para revisar aplicaciones a la Economía, revise en el libro Matemáticas para el análisis económico de Knut Sydsaeter, desde la página 272 hasta 278 y desde 296 hasta 299, en el siguiente enlace

https://www.academia.edu/32148581/_SH_Libro_Sydsaeter_Hammod_Matem%C3%A1ticas_para_el_An%C3%A1lisis_Econ%C3%B3mico

Aplicaciones Variadas

1. Calcular, si es posible, el área de los conjuntos que se indican.

(a) $\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\ /\ y\geq 0, y\leq \dfrac{1}{x^2}\right\}$

(b) Región limitada por la curva $y=1/x$ y las rectas $y=0$, $x=0$ y $x=1$

(c) Región limitada por la curva $y=1/\sqrt{x}$ y las rectas $y=0$, $x=0$ y $x=1$

(d) Región dada por

$$\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\ /\ x\leq -2, 0\leq y\leq \frac{1}{x^2-4}\right\}\cup\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\ /-2\leq x\leq 2, \frac{1}{x^2-4}\leq y\leq 0\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\ /\ 2\leq x\leq 3, 0\leq y\leq \frac{1}{x^2-4}\right\}$$

2. Si con $f(t)$ denotamos el ritmo del beneficio de una empresa (en unidades monetaria por año) y con r la tasa de interés (en tanto por uno), llamamos valor actual del beneficio futuro a $P(r)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-rt}dt$.

Se pide:

(a) Calcular $P(r)$ cuando $f(t)=e^{t}, r>1$. Observar el comportamiento de $P(r)$ ante las variaciones del tipo de interés r.

(b) Los ingresos de una empresa se acumulan a un ritmo dado por la función $f(t)=2\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$ millones de pesetas/año. Utilizando la función Γ , calcular el ingreso futuro de la empresa.

3. Si el flujo de beneficios de una empresa (en unidades monetaria por año) viene dado por $f(t)=e^{-t}$, calcular

(a) Beneficio total futuro (a partir de $t=0$).

(b) Sabiendo que $r=0{,}05$ es la tasa de interés (en tanto por uno), determinar el valor actual de todo el beneficio futuro definido por

$$VA(r)=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-rt}\, \mathrm{d}t$$

4 . Sea R la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{(4-x)^{3/2}}$, su asíntota vertical L y los ejes coordenados.

$a)$ Calcule el volumen del sólido generado al girar R alrededor de L.

$b)$ ¿Es posible asignar a la región R un número real que represente su área ?

5 . Sea R la región limitada por la gráfica de la función $h(x) = xe^{-x^2}$, $x \geq 0$, y el eje X.

$a)$ Calcule el área de la región R.

$b)$ Plantee las integrales para calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor

1) del eje X

2) del eje Y.

¿Convergen estas integrales?

6. Para más aplicaciones de áreas, volúmenes y longitud de arco en coordenadas cartesianas, polares y paramétricas, revisar el capítulo 6 del libro Cálculo Integral, de Maynard Kong. Lo encontrará en el enlace siguiente:

https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/54974

Sucesiones y Series. Serie de Taylor

Ver material anexo en hojas adjuntas

Ecuaciones Diferenciales

1. Halle la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = x + t$
2. Halle la solución del siguiente problema de valores iniciales $\frac{dx}{dt} = x + t,\ x(0) = 1$
3. Demostrar que $x(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}$ es una solución de la ecuación $\dot{x}(t) + x(t) = e^{t}$ para todo valor de C.
4. Consideremos la ecuación diferencial $t.\frac{dx}{dt} = 2x$
   a) Demostrar que $x = Ct^2$ es una solución de la ecuación dada para todo valor de C.
   b) Hallar la curva integral que pasa por $(1{,}2)$
5. Pruebe que cualquier función $x = x(t)$ que verifica la ecuación $xe^{tx} = C$ es una solución de la ecuación diferencial $(1 + tx)\dot{x} = -x^2$
6. Pruebe que $x = Ct - C^2$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ para todo valor de C. Demuestre posteriormente que no es la solución general. (Indicación: Verifique que $x(t) = \frac{t^2}{4}$ es también solución)

7. Resuelva la ecuación $x^2\dot{x} = t + 1$. Halle la curva integral que pasa por $(t, x) = (1,1)$.
8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Asuma que $x = x(t)$
   a) $\dot{x} = t^3 - t$
   b) $\dot{x} = te^t - t$
   c) $e^x\dot{x} = t + 1$
   d) $\dot{x} = ax$
   e) $\dot{x} - \frac{2}{t}x + \frac{2a^2}{t^2} = 0 \qquad (t > 0)$
   f) $\dot{x} = -tx + t^3x^3$
   g) $\dot{x} = 4x + 2e^t\sqrt{x} \qquad (x > 0)$
   h) $\dot{p}(t) + \frac{1}{t^2}p(t) = \frac{1}{t^3}$, $p(1) = 0, (t > 0)$
9. Halle la solución general de $\dot{x} + a(t)x = 0$. En particular, cuando $a(t) = a + bc^t$ (a, b, c positivos, $c \neq 1$), demostrar que la solución se puede escribir en la forma $x = Cp^tq^{c^t}$, donde p y q son constantes determinadas a, b y c, mientras que C es una constante arbitraria. (Esta es la llamada ley de mortalidad de Gompertz-Makeham, que describe de manera bastante acertada la dinámica de la edad de mortalidad en las personas de entre 30 y 80 años)
10. Las siguientes ecuaciones diferenciales se han estudiado en Economía. Resuélvalas.
   a) $\dot{K} = (An_0^\alpha\gamma^b)K^{b-c}e^{(\alpha v+\varepsilon)t}$, $K = K(t)$, $\alpha v + \varepsilon \neq 0, b - c \neq 1$
   b) $\dot{x} = \frac{(\beta-\alpha x)(x-\gamma)}{x}$, $x = x(t)$, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha\gamma \neq 0$

12. Las ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = g\left(\frac{x}{t}\right)$, donde el miembro de la derecha es una función del cociente $\frac{x}{t}$, se llaman ecuaciones diferenciales homogéneas. Probar que si se escribe $z = \frac{x}{t}$ una ecuación homogénea se convierte en una ecuación de variables separables, donde z es la función incógnita. Use este método para resolver la ecuación $3tx^2\dot{x} = x^3 + t^3$

13. Designemos por $X = X(t)$ al producto nacional, por $K = K(t)$ al stock de capital, y por $L = L(t)$ al número de obreros de un país en el instante t. Supongamos que para $t \geq 0$:

$$X = AK^{1-\alpha}L^{\alpha}$$
$$\dot{K} = sX$$
$$L = L_0 e^{\lambda t}$$

donde A, α, s, L_0 y λ son constantes positivas, con $0 < \alpha < 1$. Deduzca de esas ecuaciones una única ecuación diferencial que determine $K = K(t)$ y halle la solución cuando $K(0) = K_0 > 0$.

14. Considere el siguiente modelo de crecimiento económico de un país en desarrollo:

$$X(t) = \sigma K(t) \qquad \text{(i)}$$
$$\dot{K}(t) = \alpha X(t) + H(t) \qquad \text{(ii)}$$
$$N(t) = N_0 e^{\rho t} \qquad \text{(iii)}$$

donde $X(t)$ es la producción total anual, $K(t)$ el stock de capital, $H(t)$ el flujo anual de ayuda exterior y $N(t)$ el tamaño de la población, todo medido en el instante t. La ecuación (i) refleja la hipótesis de que el volumen de producción es proporcional al stock de capital; el factor de proporcionalidad σ se llama la *productividad media del capital*. En (ii) decimos que el crecimiento del capital es igual al ahorro interno más la ayuda exterior. Suponemos que el ahorro interno es proporcional a la producción; el factor de proporcionalidad α se llama *tasa de ahorro*. Finalmente, (iii) nos dice que la población crece a una tasa proporcional constante igual a ρ.

a) Deduzca una ecuación diferencial para $K(t)$

b) Suponiendo que $H(t) = H_0 e^{\mu t}$, halle la solución de la ecuación diferencial dada en (a), con $K(0) = K_0$ y $\alpha\sigma \neq \mu$.

c) Halle una expresión de $x(t) = \frac{X(t)}{N(t)}$, que es la producción per cápita.

15. En un modelo macroeconómico, $C(t), I(t)$ e $Y(t)$ designan respectivamente consumo, inversión y renta nacional de un país en el instante t. Supongamos que:

$$C(t) + I(t) = Y(t)$$
$$I(t) = k\dot{C}(t)$$
$$C(t) = aY(t) + b$$

Para todo t, donde a, b y k son constantes positivas, $a < 1$.

a) Deduzca una ecuación diferencial para $Y(t)$

b) Resuelva la ecuación encontrada en (a) con $Y(0) = Y_0 > b/(1-a)$, luego halle la correspondiente función $I(t)$.

c) Calcule $\lim_{t\to\infty}[Y(t)/I(t)]$.

Referencia: Capítulo 21 del libro "Matemáticas para el análisis económico" Knut Sydsaeter, Peter Hammond, Andrés Carbajal.